

問題 2

以下の問に答えなさい。なお、導出の過程を明示すること。

(I) 偏微分方程式に関する以下の問に答えなさい。

a を正の定数とし、 $u = u(x, t)$ (u の単位は $^{\circ}\text{C}$) についての $t > 0$, $0 < x < \pi$ における一次元熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を変数分離法 ($u = X(x)T(t)$) によって解くことを考える。

(1) この方程式の一般解を求めなさい。

(2) $t \geq 0$ において右端の境界条件が $u(\pi, t) = 0$ の場合と、 $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$ の場合とで、物理的な状況はどのように異なるか。簡潔に説明しなさい。

(3) 境界条件は $t \geq 0$ において左端 $u(0, t) = 0$ かつ右端 $u(\pi, t) = 0$ であり、初期条件は $0 \leq x \leq \pi$ において $u(x, 0) = f(x)$ とする。ここで $f(x)$ はフーリエ正弦級数に展開可能であるとする。このとき $u(x, t)$ を求めなさい。

(II) 確率統計に関する以下の問に答えなさい。

(1) n 個の箱と m 個のボール (n, m は正の整数) があり、すべてのボールをいずれかの箱へと入れることとする。ただし、箱はそれぞれ区別できるが、ボールはどれも同じものとする。 $n = 5, m = 9$ とし、一つの箱には必ず一つ以上のボールを入れることとした場合、箱へのボールの入れ方は何通りあるか。

(2) 6 人の学生全員で一度だけジャンケンを行うとする。このとき、勝ち負けが決まらず「あいこ」となる場合の数を求めなさい。