

問題 1

以下の問いに答えよ。なお、導出の過程を明示すること。

(I) 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $(x^2 - x + 2)\frac{dy}{dx} - 4(2x - 1)y = 0$

(2) $(x + 2)y + 2x\frac{dy}{dx} = 0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x} + 2x$

(II) 行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ として、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ を計算せよ。

(2) 行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) $\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix}$ として、 $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ の一般解を求めよ。