

問題 1

以下の問いに答えなさい。なお、導出の過程を明示すること。

(I) 以下の常微分方程式の一般解を求めなさい。

(1) $(x+2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} + 2y\sin 2x = 2e^{\cos 2x}$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$

(II) 以下の問いに答えなさい。

(1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ の、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と、それぞれに対応する固有ベクトル

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ (列ベクトル) を求めなさい。なお、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とし、固有ベクトルを正規化する必要はない。

(2) 上記 \mathbf{A} の固有ベクトルと固有値より、 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3]$, $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ としたと

き、 $\mathbf{AX} = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{A} = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}^{-1}$ であることを利用して、 \mathbf{A}^n を求めなさい。