専門科目（午前）　　　　　　　２３ 大修
土木工学（工学基礎）

時間９：３０～１１：００

問題２

以下の問に答えなさい．なお，導出の過程も明示すること．

I　長さ L の細い棒の温度分布 $T(x, t)$が式(1)の偏微分方程式で表されるとする．ここで，t は時間，x は距離を表す．棒の初期温度は $T(x, 0) = f(x)$で，棒の両端の温度は $T(0, t)=T(L, t)=T_0$ に保たれているものとする．また，C 及び α は定数で $\alpha > 0$ とする．

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha T \tag{1}$$

(1) $t \to \infty$のとき，棒の温度分布 $T(x, \infty)$がどうなるか求めよ．

(2) $T(x, t) = u(x, t)w(t)$と表したとき，式(1)が式(2)に変形できたとする．このとき，w の式形を求めよ．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

(3)いま，棒の両端の温度が $T_0=0$，初期温度分布が $T(x,0) = f(x) = 100\sin(\pi x/L)$ で表されるとき，式(1)の解を求めよ．また，式(1)の右辺第２項があることにより棒の温度変化にどのような影響があるか記述せよ．なお，$T_0=0$，初期温度分布が $f(x)$の場合，式(2)の解は式(3)で表されることを利用してよい．

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \exp(-\lambda_n{}^2 t) \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ \lambda_n &= Cn\pi/L \end{aligned} \tag{3}$$

II　ある確率変量 x の確率密度関数 $f_X(x)$ が式(4)で表されるものとする．

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (x \geq 0) \tag{4}$$

(1) $f_X(x)$ の母平均 μ と母分散 σ^2 を求めよ．

(2) $x \geq 3\mu$ となる確率を求めよ．

(3) $y = g(x) = x^2$ のとき，y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．ただし，式(5)の関係式が成り立つものとする．ここで，g^{-1} は g の逆関数で，$x = g^{-1} = g^{-1}(y)$ である．