専門科目（午前）　　　　　　　２２　大修
土木工学（工学基礎）

時間　９：３０～１１：００

問題２

以下の問に答えなさい。なお、導出の過程を明示すること。

(I) 半無限の弦の一次元振動問題を取り扱う。弦の一端は$x=0$に位置しており、弦は$0 \le x$の領域にある。弦に垂直な方向の振動は、$u(x,t)$を弦の変位として、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

で記述される。

(1) 変数λの関数を$\psi(\lambda)$、$\phi(\lambda)$とする。$u(x,t)=\psi(x-ct)+\phi(x+ct)$は波動方程式の解であることを示せ。

(2) 境界条件が$u(0,t)=0$であるとする。以下の初期条件の場合について、$t=0$と$t=1$における$\psi(x-ct)$および$\phi(x+ct)$を描け。ただし$c=2$とする。

初期条件：　$u(x,0)=\begin{cases}1 & \text{for } 1<x<2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$,　　$\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=0$

(II) 確率変数λの平均（期待値）を$E(\lambda)$、分散を$V(\lambda)$と書く。

(1) 確率変数xの確率密度関数は$f(x)$とする。$f(x)$を用いて$E(x)$と$V(x)$を表せ。

(2) 以下の関係式(a)と(b)が成立つことを示せ。cは定数とし、確率変数x_1とx_2は互いに独立であるとする。解答の際にはx_1とx_2の確率密度関数を$f_1(x_1)$および$f_2(x_2)$で表せ。

(a) $E(cx_1)=cE(x_1)$　および　$V(cx_1)=c^2V(x_1)$

(b) $E(x_1+x_2)=E(x_1)+E(x_2)$　および　$V(x_1+x_2)=V(x_1)+V(x_2)$

(3) 互いに独立なn個の確率変数$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$は同じ期待値μと分散σ^2を持つとする。相加平均$\bar{x}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$の期待値$E(\bar{x}_n)$と分散$V(\bar{x}_n)$を$\mu$および$\sigma^2$で表せ。また、$n\to\infty$としたときの相加平均$\bar{x}_n$に対する確率密度関数の概形を描け。