工学基礎 問2

以下の設問(I)(II)について両方とも解答しなさい。

(I)以下の偏微分方程式を考える。

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$
 (1)

ただし、 α, β は共に正の定数とし、t 及びx はそれぞれ時刻と空間座標を表すとする。

(1) 式(1)の右辺を "0"とおいた偏微分方程式

$$\frac{\partial f_A(x,t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial f_A(x,t)}{\partial x} = 0$$
 (2)

の一般解は $x-\alpha t$ の関数 $f_A(x,t)=g(x-\alpha t)$ で与えられる。式(2)の解 $f_A(x,t)$ の形を $f_A(x,t)=D(x)S(t)$ と仮定して、変数分離法により式(2)を解き、解が実際に $x-\alpha t$ の関数として与えられることを示しなさい。

- (2) 式(2)の偏微分方程式の解 $f_A(x,t)$ を用いて、式(1)の解が $f(x,t) = f_A(x,t)T(t)$ と書くことが出来ると仮定する。偏微分方程式(1)から T(t) に対する常微分方程式を導出しなさい。
- (3) $f_A(x,t) = \sin(x-\alpha t)$ で与えられるとして、初期条件 $f(x,0) = \sin x$ を満たす式(1)の解を求めなさい。また、時間 t における解 f(x,t) の概形と初期条件を図示し、題意の偏微分方程式(1)はどのような物理現象を表現するものなのかを図をもとに簡単に説明しなさい。

(II) 一列に並んだ無数の箱を考える。これらの箱の一つにボールを一つ入れ、一回の試行でボールは隣り合う二つの箱のうちいずれかに必ず移動するとする。一回の試行でボールが右あるいは左の隣の箱に移る確率は等しく1/2 だとする。図 1 のように番号 (i=...,-2,-1,0,1,2,...) を付けて箱の位置を表すことにし、最初ボールはi=0 に入っていたとする。

(1) 以下の文章の空欄 A,B,C,D を埋めなさい。

「2N 回の試行の結果、i=2m の箱にボールが入っていたとする。この2N 回の試行のうち、ボールが右側の箱に移動した総回数を N_R 、同じく左側の箱に移動した総回数を N_R する。このとき、 N_R , N_R と N_R の間には

$$N_R + N_L = \boxed{A} \tag{3}$$

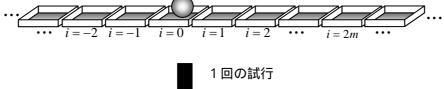
$$N_R - N_L = \boxed{B} \tag{4}$$

の関係が成り立つ。これらから、 N_R, N_L をそれぞれN, mを用いて表せば、

$$\begin{array}{c|c}
N_R = & C \\
N_L = & D
\end{array} \tag{5}$$

となる。」

(2) 2N 回の試行において右側に移動した総回数が N_R 回である確率 P_{N_R} を求め、式(5)の関係式を用いて、2N 回の試行の結果i=2m の箱にボールが入る確率 P_{2m} を求めなさい。



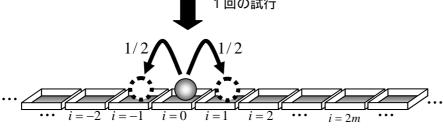


図 1