$\boxed{\text{問題}}$　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ をそれぞれ n 次の正方行列とする。このとき，$\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の行列式 ($|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$ または $\det \boldsymbol{A}$，$\det \boldsymbol{B}$ と標記する) について，以下の性質が成立する。ここに挙げた性質については，証明なしに使ってよいものとして，続くの問いに答えよ。

I.　交代性：

$$\begin{aligned} &\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \quad \boldsymbol{a}_r \cdots \quad \boldsymbol{a}_q \cdots \boldsymbol{a}_n] \\ &\qquad\qquad\quad \updownarrow q \text{ th} \quad \updownarrow r \text{ th} \\ &= -\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \quad \boldsymbol{a}_q \cdots \quad \boldsymbol{a}_r \cdots \boldsymbol{a}_n] \end{aligned}$$

II.　線形性：

$$\begin{aligned} &\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \alpha \boldsymbol{a}_q + \beta \boldsymbol{b}_q \cdots \boldsymbol{a}_n] \\ &= \alpha \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_q \cdots \boldsymbol{a}_n] + \beta \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b}_q \cdots \boldsymbol{a}_n] \end{aligned}$$

III.　行列式の値は行と列を入れ替えても変らない：

$$|\boldsymbol{A}^t| = |\boldsymbol{A}|$$

ただし，$\boldsymbol{A}^t$ は $\boldsymbol{A}$ の転置行列を表す。

IV.　$\boldsymbol{A} = [a_{pq}]$ に対して，

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{1p} a_{1q} + \tilde{a}_{2p} a_{2q} + \cdots + \tilde{a}_{np} a_{nq} &= \delta_{pq} |\boldsymbol{A}| \\ a_{1p} \tilde{a}_{1q} + a_{2p} \tilde{a}_{2q} + \cdots + a_{np} \tilde{a}_{nq} &= \delta_{pq} |\boldsymbol{A}| \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，$\delta_{pq} = 0$ $(p \neq q)$，$\delta_{pp} = 1$，$\tilde{a}_{pq}$ は $\boldsymbol{A}$ における a_{pq} の余因子である。

V.　積の行列式は行列式の積：

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

(1)　$\boldsymbol{A} = [a_{pq}]$ における a_{pq} の余因子を $\tilde{a}_{pq}$ とするとき，行列 $\tilde{\boldsymbol{A}} = [a_{qp}]$ を $\boldsymbol{A} = [a_{pq}]$ の余因子行列という。このとき，

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \tilde{\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}| \boldsymbol{E}$$

が成立することを示せ。

(2)　$\boldsymbol{A}$ が正則であるとき，その逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \tilde{\boldsymbol{A}}$$

で与えられることを示せ。

(3)　互いに同値である条件を選べ。

a)　$\boldsymbol{A}$ は正則

b)　$|\boldsymbol{A}| \neq 0$

c)　rank $\boldsymbol{A} = n$

d)　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解を持つ (ただし，$\boldsymbol{x}$ は n 次元縦ベクトルである)。

(4)　$n \geq 2$，$f_1(x, y, z) = x$ としたとき，n 次の行列式

$$f_n(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & & & & \\ z & x & y & & 0 & \\ & z & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & z & x & y \\ & & & & z & x \end{vmatrix}$$

とおくと，漸化式 $f_n = xf_{n-1} - yzf_{n-2}$ $(n \geq 3)$ が成立することを証明せよ。

(5)　$|-\boldsymbol{A}| = (-1)^n|\boldsymbol{A}|$ を証明せよ。

(6)　$\boldsymbol{A}$ が奇数次の交代行列，すなわち $\boldsymbol{A}^t = -\boldsymbol{A}$ を満足する行列であるとき，$|\boldsymbol{A}| = 0$ を証明せよ。

(7)　方程式と未知数の個数がともに n であるような連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は，

$$x_p = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p-1} & b_1 & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p-1} & b_2 & a_{2p+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np-1} & b_n & a_{np+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で与えられることを示せ。ただし，$p = 1, 2, \ldots, n$ で，$\boldsymbol{A} = [a_{pq}]$，$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^t$，$\boldsymbol{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^t$ とおき，$\boldsymbol{A}$ は正則であるとした。