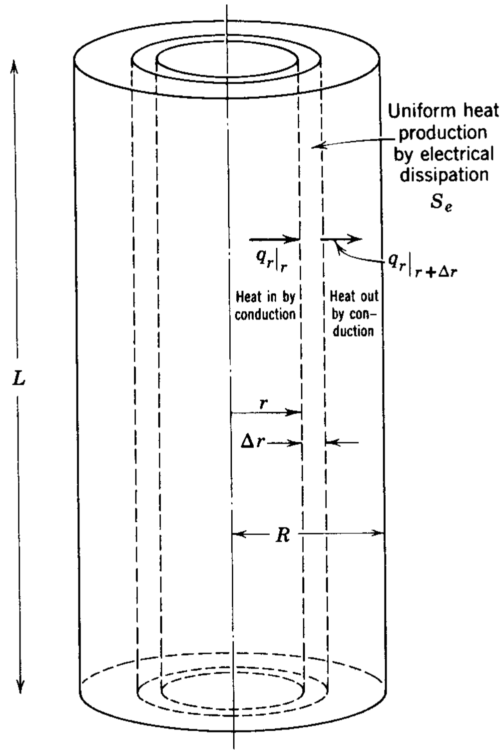
口述試験

問 1



右図のように半径 R、長さ L の電線に電気が流れており発熱している。図のように軸 r を電線の中心線から半径方向に取る。電線は均一で、電気抵抗は、どこも同じであるから、電線の単位体積あたりの発熱量はどこも同じで、単位体積単位時間あたりの発熱量を、S_e とする。電線の長さ方向の温度分布は無視しうるため、熱の輸送は半径方向についてのみ考えれば良い。そこで、半径方向に輸送される熱フラックス(単位断面積、単位時間あたりの熱エネルギーの輸送量)を q_r とおく。

(1) ここで、図のように半径 r で厚さ Δr の円筒を考え、円筒中のエネルギーバランスを考えると、定常状態では、次式が成立することを示せ。

$$\frac{d}{dr}(rq_r) = S_e r$$

[注] 参考までにヒントを以下に英語で述べる。

Rate of thermal energy ***in*** across cylindrical surface at r・・・・・・ $2\pi rL\left(q_r|_r\right)$

Rate of thermal energy ***out*** across cylindrical surface at $r+\Delta r$・・・ $2\pi(r+\Delta r)L\left(q_r|_{r+\Delta r}\right)$

Rate of production of thermal energy by electrical dissipation・・・ $2\pi r\Delta rLS_e$

We now substitute these three expressions into the energy balance equation of (rate of thermal energy ***in***)－(rate of thermal energy ***out***)+(rate of thermal energy production)=0. Division by $2\pi L\Delta r$ and taking the limit as Δr goes to zero gives

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{(rq_r)|_{r+\Delta r}-(rq_r)|_r}{\Delta r} = S_e r$$

The left side of the equation is just the first derivative of rq_r with respect to r, so that above equation becomes a first-order ordinary differential equation for the energy flux.

(2) 前問で答えた微分方程式を r=0 で無意味となる解を除いて解くと、以下の式が得られることを示せ。

$$q_r = \frac{S_e r}{2}$$

(3) 熱の輸送は、温度勾配を伴い、$q_r = -k\left(\frac{dT}{dr}\right)$ という式で両者は関係付けられる。ここで、T は電線の局所的な温度で r の関数である。r=R での電線の温度を T_0 とした場合、T を r の関数として、R, S_e, k, T_0 も用いて表せ。

(4) 電線の中の温度分布を図示し、また、断面平均温度を求めよ。