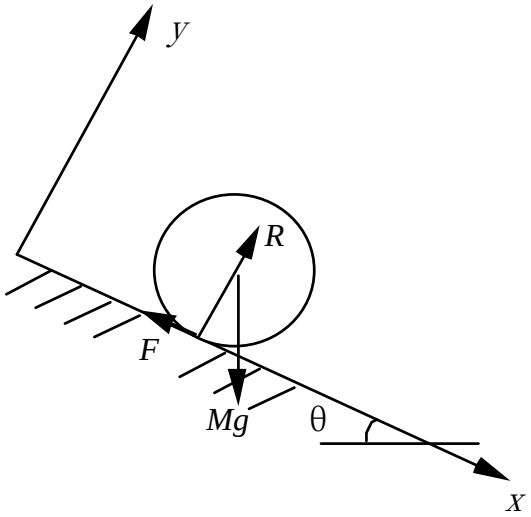
[No.1]　θの傾斜を持つ斜面に慣性モーメント I, 質量 M, 半径 a の円板が置かれており、この物体の 2 次元空間での運動を考える。x 軸、y 軸を図のように取り、円板の中心の位置を(x, y)、円板に作用する力のうち垂直抗力を R, 摩擦力を F とし、重力加速度を g とする。円板の中心が x=0 の位置にいる状態で、支えていた手を静かに離したところ円板は、滑ることなく x 軸方向に転がり始めた。この場合に、以下の問いに答えよ。



（1）　円板の x 方向と y 方向の運動方程式を図に示された力および θを用いて立式せよ。

（2）　物体が運動をはじめてから回転した角を φ[rad]とすると、次式が成り立つが、この式の意味を簡潔に述べなさい。

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = aF$$

（3）　物体が滑ることなく転がり始めたことから x と φの間に成り立つ関係を述べよ。

（4）　設問(1)(2)(3)の結果を用いて、x 方向の運動方程式を F, φを含まない形で記述せよ。

（5）　円板が滑りを起こさないための条件は、静止摩擦係数を μ_0 として、次式であらわされることを示せ。

$$\tan\theta \le \frac{Ma^2 + I}{I}\mu_0$$

・θをある程度急にしてもう一度実験を行ったところ、今度は、滑りながら転がり始めた。

（6）滑りながら転がる場合の F を $M, g,$ θ, μで表せ(μは動摩擦係数)。

[No.2] 図 1 のように A 市は、B 湾に面しており、B 湾の水は、A 市からの廃水により汚染されている。この状況を図 2 のように簡略化して考えることにする。すなわち、B 湾は、深さ h[m], 幅 W[m], 長さ L[m]の直方体に近似され x 軸を図の左右方向に取る。ここで、以下の仮定を置く。

i)A 市の廃水はすべて x=0 の地点に流量 Q[m³/s]、濃度 C_0[kg/m³]で放流される。

ii)湾内の汚染物質の濃度 C[kg/m³]は x のみの関数となり、t の関数とはならない。

iii)潮汐や降雨は無視する。また、ここで対象とする汚染物質は、湾内で沈降したり反応したりしない。

iv)湾内では、いたるところ、すべての水深で図の左から右に一定の平均流速 u[m/s]で流れている。

v)湾の出口(x=L)では濃度が C_1[kg/m³](<C_0)である。

vi)図の左から右へ輸送される汚染物質のうち、平均流れによって輸送される汚染物質の量は、単位断面積単位時間あたり

$$uC(x)$$

であらわされる。また、平均流れとは関係なく濃度の高い方から低い方へも物質は輸送され、その輸送される量は濃度勾配に比例するから、図の左から右を正方向とすると、

$$-D\frac{dC(x)}{dx}$$

であらわされる。ここで、D[m²/s]は、拡散係数と呼ばれるもので湾内では一定値をとるとする。以上から、単位断面積、単位時間あたりの物質輸送量 J[kg/s/m²]は、

$$J = uC(x) - D\frac{dC(x)}{dx}$$

であらわされる。

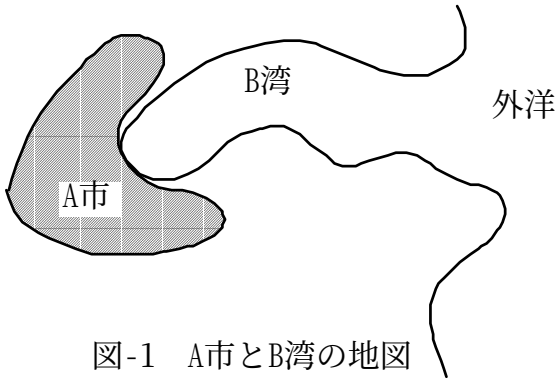


図-1　A市とB湾の地図

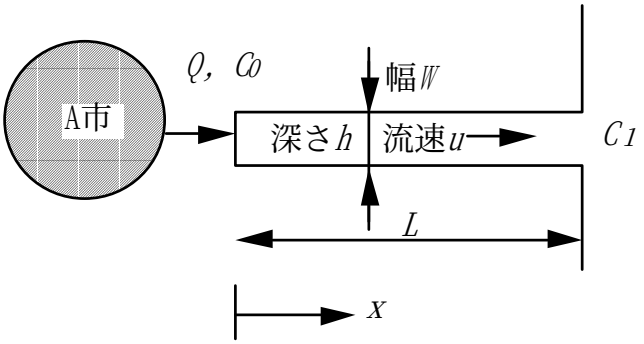


図-2　単純化されたB湾のモデル

以上の仮定のもとで以下の問いに答えよ。

（1）u を Q, h, W であらわせ。

（2）濃度 $C(x)$について以下の微分方程式が成り立つことを示せ。

$$Q\left(C(x) - C_0\right) = hWD\frac{dC(x)}{dx}$$

（3）上の微分方程式を解き、湾の出口での境界条件を加味することにより、濃度 C を x の関数であらわせ。

（4）Q/hWD が大きい場合と小さい場合で、横軸が x、縦軸が C のグラフを書き、グラフの形がどのように変わるか述べよ。